Основанные на решетках алгебраические модели продукционных систем и возможности их применения в некоторых задачах ИИ

Бинарные отношения

- Транзитивность: $(a,b),(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$
- Замыкание, редукция
- Алгоритмы типа Уоршолла $O(n^3)$

1. Элементарная продукционная логика

- Множество фактов F
- Продукции $a \to b \ (a, b \in F)$
- Логическое отношение – транзитивность
- Логическое замыкание $R^* = \to^*$
- Эквивалентные базы знаний (БЗ)
- Логическая связь $a \xrightarrow{R} b$:

$\exists b_1, ..., b_m \in F; \ (b_{i-1}, b_i) \in R, \ i = 1, ..., m;$

$a = b_0; \ b = b_m$

Существование замыкания

Теорема 1.1. Для произвольного бинарного отношения R на множестве F логическое замыкание существует и представляет собой совокупность всех пар $(a,b) \in F$, логически связанных отношением R .

А.Ахо, М.Гэри, Д.Ульман: для ациклического графа существует ($O(n^3)$) единственная транзитивная редукция.

Продукционно-логические уравнения

Начальное множество $F_0(R) = \{x \in F \mid \forall a \Rightarrow (a, x) \notin R\}$

Уравнение

(1.1) $R^*(x) = b$,

$b \in F$ – заданный элемент, $x \in F_0$ – неизвестный.

Частное и общее решения.

Решение ур-я (1.1) ~ обратный логический вывод.

Расслоение отношения $R = \bigcup_{t \in T} R_t$. Уравнения вида

(1.2) $R_t^*(x) = b$

Разрешимость логических уравнений

Теорема 1.2. Каждое (частное) решение уравнения (1.1) является решением некоторого уравнения (1.2). Уравнение (1.2) имеет не более одного решения.

Теорема 1.3. Пусть $G_t(b)$ - подграф отношения R_t, содержащий вершину b и все вершины, из которых она достижима. Тогда, если граф $G_t(b)$ ацикличен, то ур-е (1.2) имеет единственное решение, иначе решений нет.

Круг вопросов о продукционно-логических отношениях

- существование и структура замыкания
- эквивалентные преобразования
- каноническая форма
- существование и построение редукции
- продукционно-логические уравнения

2. Стандартная продукционная логика

- Множество элементарных фактов F
- Продукции $\{a_1,...,a_n\} \to \{b_1,...,b_m\}$ $(a_i, b_j \in F)$
- Обозначения $A = \{a_1,...,a_n\}$, $B = \{b_1,...,b_m\}$
- Решетка множеств $A, B \in 2^F = \mathbb{F}$

Решетки

- Частичный порядок: $a \le b,\ \ a,b \in \mathbb{F}$
- Операции $\wedge\,,\vee\,:\forall\, a\,,b\,\in\,\mathbb{F}\,\Rightarrow\,\ a\,\wedge\,b\,,a\,\vee\,b\,\in\,\mathbb{F}$

  $a \wedge b \le b,\ a \wedge b \le a;\quad c \le b, c \le a \Rightarrow c \le a \wedge b$

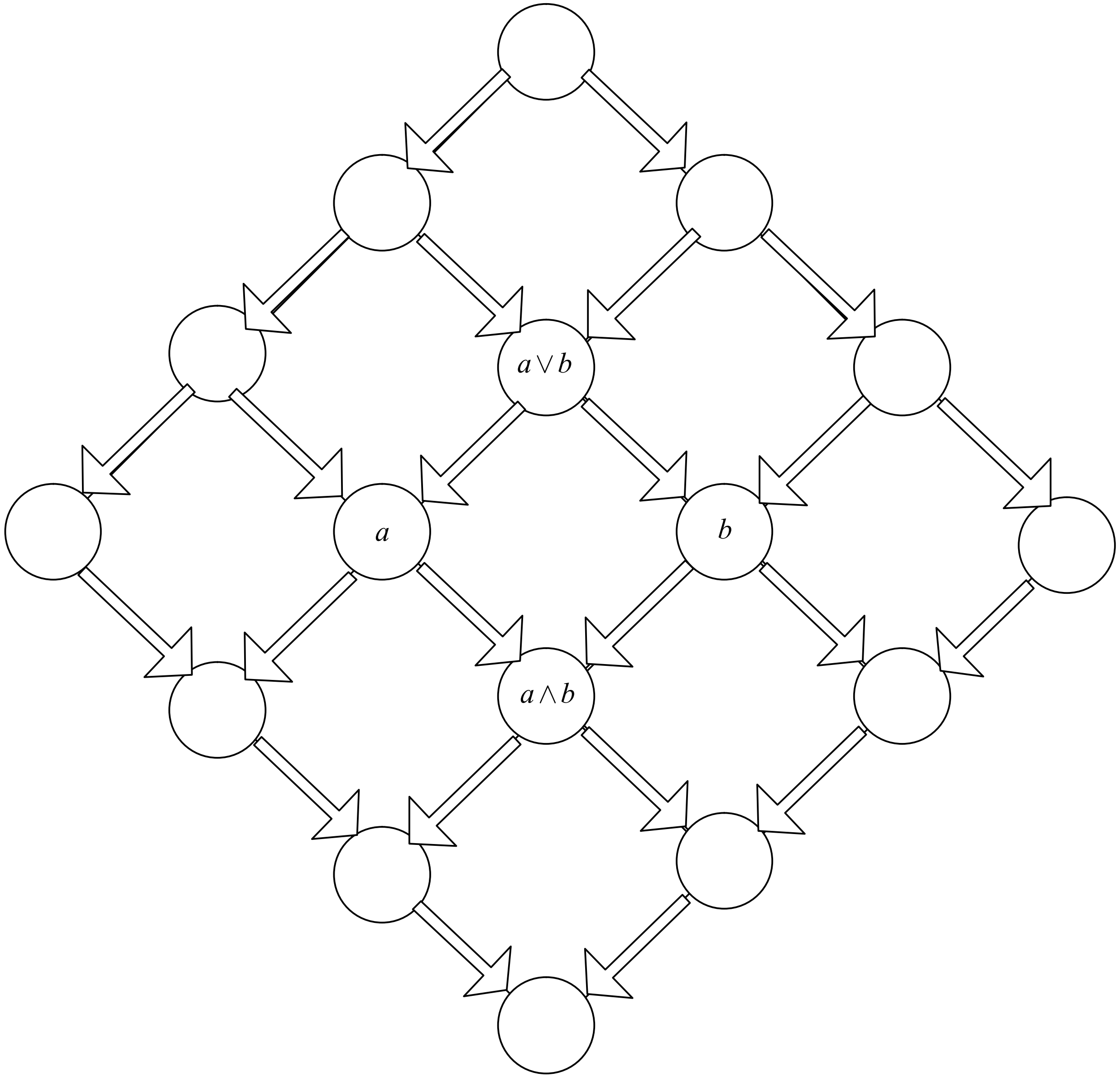
  $b \le a \vee b,\ a \le a \vee b;\quad b \le c, a \le c \Rightarrow a \vee b \le c$

- Решетки: множеств, типов
- Ограниченная решетка:

  $\exists O, I \in \mathbb{F} : O \le a \le I\ \ \forall a \in \mathbb{F}$

- Точечная решетка: $\forall a \in \mathbb{F} \Rightarrow a = \vee_t a_t$,

  Точка $a_t : b < a_t \Rightarrow b = O$



$a \vee b$
a
b
$a \wedge b$

Логические отношения

- Модель: $\mathbb{F} = 2^F$, $(\leq, \wedge, \vee) \sim (\subseteq, \bigcap, \bigcup)$
- Продукции $A \to B \ (A, B \in \mathbb{F})$
- Логическое отношение $\to$ тавтология: $A \supseteq B \Rightarrow A \to B$, транзит-сть, дистрибутивность (монотонный вывод): $\{A \to B, A \to C\} \Rightarrow A \to B \bigcup C$
- Логическое замыкание R^L
- Логическая связь $A \xrightarrow{R} B$

Существование замыкания

<u>Теорема 2.1</u>. Для бинарного отношения R на решетке $\mathbb{F}$ логическое замыкание R^L существует и представляет собой множество всех упорядоченных пар $A, B \in \mathbb{F}$, логически связанных отношением R.

Эквивалентные преобразования

- Два отношения эквивалентны (~), если их логические замыкания совпадают.
- Теорема 2.2. Пусть R, R_1, R_2 – отношения на $\mathbb{F}$. Если $R_1 \sim R_2$, то $R \bigcup R_1 \sim R \bigcup R_2$.
- Принцип локальности

Каноническая форма

- Отношение на точечной решетке $\mathbb{F}$ называется каноническим, если оно задано множеством пар вида (A, a), где $A \in \mathbb{F}$, a – точка в $\mathbb{F}$.
- Теорема 2.3. Для любого бинарного отношения на точечной решетке существует логически эквивалентное ему каноническое отношение.

Структура замыкания

- Для R построим $\tilde{R}$:
$$R_1 = R \bigcup \{(A, A) \mid A \in \mathbb{F}\}$$
$$R_2 = R_1 \bigcup \{(A_1 \bigcup ... \bigcup A_m,\ B_1 \bigcup ... \bigcup B_m) \mid (A_i, B_i) \in R_1\}$$
$$\tilde{R} = R_2 \bigcup \{(A, B) \mid A \supset B\}$$

- <u>Теорема 2.4</u>. Логическое замыкание R совпадает с транзитивным замыканием соответствующего отношения $\tilde{R}$.

Логическая редукция

- Для R построим $\underset{\sim}{R}$ (обратные шаги):

$$R_{-1} = R \setminus \{(A, B) \mid A \supset B\}$$

$$R_{-2} = R_{-1} \setminus \{(A_1 \cup \ldots \cup A_m,\ B_1 \cup \ldots \cup B_m) \mid (A_i, B_i) \in R_{-1}\}$$

$$\underset{\sim}{R} = R_{-2} \setminus \{(A, A) \mid A \in \mathbb{F}\}$$

- <u>Теорема 2.5</u>. Если для $\tilde{R}$ существует транзитивная редукция R^0, то соответствующее ей $\underset{\sim}{R}^0$ - логическая редукция исходного отношения R.

Логические уравнения

- Соответствие $R^L : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$. $(A, B) \in R^L$
- Макс. образ, минимальный прообраз
- Точечная решетка, каноническое отношение, начальная точка
- Начальное множество $\mathbb{F}_0 \subseteq \mathbb{F}$
- Уравнение

(2.1) $R^L(X) = B \;\; (B \in \mathbb{F},\; X \in \mathbb{F}_0)$

- Решения: приближенное, точное, общее

Методы решения

Теорема 2.5. Пусть $\{X_s\}$ – общее решение уравнения (2.1) при $B = B_1$, а $\{Y_p\}$– общее решение при $B = B_2$. Тогда общее решение при $B = B_1 \bigcup B_2$ – множество всех элементов вида $X_s \bigcup Y_p$, из которого исключены элементы, содержащие другие элементы этого же множества.

Расслоение

- $\mathbb{F}$ – точечная решетка, R – каноническое отношение, B – конечное объединение точек.
- Расслоение отношения $R = \bigcup R_t$. Уравнения:

(2.2) $R_t^L(X) = B \ \ (t \in T)$

<u>Теорема 2.6</u>. Каждое решение уравнения (2.1) является решением некоторого уравнения (2.2). Уравнение (2.2) имеет не более одного решения.

<u>Следствие</u>. Для нахождения общего решения (2.1) достаточно найти все решения (2.2), затем исключить элементы, содержащие другие элементы.

Уравнение с точкой

- Уравнение

(2.3) $R_t^L(X) = b$ (b – точка)

- Граф G_t : каждая точка из R_t – вершина; для пары $(A,a) \in R_t$ – дуги из всех точек элемента A в вершину a.
- Граф $G_t(b)$: подграф, содержащий b и все вершины, из которых она достижима.

Разрешимость

Теорема 2.8. Если граф $G_t(b)$ не имеет цикла, то единственное решение уравнения (2.3) – объединение всех точек, соответствующих входным вершинам графа. Если $G_t(b)$ содержит цикл, то уравнение решений не имеет.

3. Продукционная логика 0 порядка

- Булева решетка $\mathbb{F}$ – задана операция $'$:
  $\forall a\ \exists a': a \wedge a' = O,\ a \vee a' = I$
- Дистрибутивность
  $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c);\ (a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$
- Решетка Линденбаума-Тарского $\mathbb{L}$
  $(a \le b) \Leftrightarrow (a \Rightarrow b)$

Продукционно-логические отношения $\to$

- Содержат $\le$: $a \le b \Rightarrow a \to b,\ \ a, b \in \mathbb{F}$
- Контрапозиционность $a \to b \Rightarrow b' \to a'$
- Дистрибутивность

$$\{a \to b_1, a \to b_2\} \Rightarrow a \to b_1 \wedge b_2$$

$$\{a_1 \to b, a_2 \to b\} \Rightarrow a_1 \vee a_2 \to b$$

- Транзитивность $\{a \to b, b \to c\} \Rightarrow a \to c$
- Логическое замыкание, редукция

Результаты

- Существует логическое замыкание
- Возможны локально-эквивалентные преобразования
- Логическое замыкание R совпадает с транзитивным замыканием $\tilde{R} \supseteq R$
- Логическая редукция R сводится к транзитивной редукции $\tilde{R}$

4. Продукционная логика 1 порядка

- Полная булева решетка – многоместные операции
- Алгебраизация кванторов
  $\forall x P(x) \sim \bigwedge_{x \in X} P(x); \; \exists x P(x) \sim \bigvee_{x \in X} P(x)$
- Логические отношения на полной булевой решетке – бесконечная дистрибутивность
- Логическое замыкание, редукция
- Аналогичные результаты

Применения

- Автоматическая оптимизация БЗ
- Верификация БЗ
- Построение эффективных процессоров обратного вывода
- Логические свойства императивных алгоритмов
- Исследование иерархий типов, рефакторинг в ООП
- Оптимизация условных СПТ