

===== МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ =====

УДК: 32.81

## Модель взаимодействия между обучением и эволюционной оптимизацией

©2012 Редько В.Г.\*

*Научно-исследовательский институт системных исследований, Российская академия  
наук, Москва, 117218, Россия*

**Аннотация.** Построена и исследована модель взаимодействия между обучением и эволюционной оптимизацией. Изучен механизм генетической ассимиляции приобретаемых навыков в течение ряда поколений дарвиновской эволюции. При генетической ассимиляции индивидуально приобретаемые путем обучения навыки «переизобретаются» эволюцией и записываются непосредственно в геном особей. Показано, что генетическая ассимиляция происходит следующим образом: при обучении и дальнейшем отборе распределение особей смещается в сторону оптимума, вследствие этого геномы отобранных особей также приближаются к оптимуму. Проанализирован механизм влияния нагрузки на обучение, которая приводит к значительному ускорению эволюции. Изучен механизм эффекта экранирования, приводящего к тому, что сильное обучение тормозит эволюционный поиск.

**Ключевые слова:** *скорость и эффективность эволюционного процесса, эффект Болдуина, генетическая ассимиляция, нагрузка на обучение, эффект экранирования*

### ВВЕДЕНИЕ

После появления дарвиновской теории эволюции у многих исследователей возникал вопрос: если эволюционный процесс происходит в результате мутаций и последующего отбора, то могут ли за счет случайного мутационного поиска возникать весьма нетривиальные полезные навыки живых организмов? И еще в XIX веке возникли концепции, предполагающие, что между обучением (или другими процессами приобретения индивидуальных навыков при жизни отдельного организма) и эволюцией возможно взаимодействие [1–3] и обучение может существенно способствовать эволюционному процессу. Такой тип влияния обучения (или другого приобретения полезного навыка в течение жизни отдельного организма) на эволюционный процесс часто называют эффектом Болдуина (по имени одного из авторов концепции). Согласно этому эффекту первоначально приобретенные навыки организмов после ряда поколений могут стать наследуемыми.

Эффект Болдуина работает в два этапа. На первом этапе эволюционирующие организмы (благодаря соответствующим мутациям) приобретают свойство обучаться некоторому полезному навыку. Приспособленность таких организмов увеличивается, следовательно, они распространяются по популяции. Но обучение имеет свои недостатки, так как оно требует энергии и времени. Поэтому возможен второй этап, который называют *генетической ассимиляцией* [4]: приобретаемый полезный навык может быть «повторно изобретен» генетической эволюцией, в результате чего он записывается непосредственно в геном и становится наследуемым. Второй этап длится

---

\* [vgredko@gmail.com](mailto:vgredko@gmail.com)

множество поколений; устойчивая окружающая среда и высокая корреляция между генотипом и фенотипом облегчают этот этап. Таким образом, полезный навык, который первоначально был приобретаемым, может стать наследуемым, хотя эволюция имеет дарвиновский характер.

Попытки моделирования и анализа взаимодействия между обучением и эволюцией, в том числе эффекта Болдуина, проводились рядом авторов, см., например, сборники [5,6] и работы [7–11]. В частности, в работе Хинтона и Новлана [7] было продемонстрировано, что обучение может направлять эволюционный процесс к нахождению оптимума. В работе Мейли [8] было показано, что эффективное обучение также может наоборот препятствовать эволюционной оптимизации и генетической ассимиляции, если обучение увеличивает шансы нахождения хорошего фенотипа независимо от генома особи. Этот эффект был назван в [8] *эффектом экранирования* (Hiding effect). Суть этого эффекта состоит в том, что, если обучение достаточно сильно меняет фенотип особей и особи отбираются при эволюции в соответствии с фенотипом, то отбор, определяемый фенотипом, может слабо зависеть от генотипа. За счет эффекта экранирования существенно снижается роль генотипа при эволюционном отборе, а генетическая ассимиляция становится менее выраженной. Кроме этого, в [8] было учтено, что процесс обучения имеет дополнительную нагрузку на особь (обучение требует времени и ресурсов) и приспособленность особи может уменьшаться под влиянием этой нагрузки. *Нагрузку на обучение* можно учесть, предположив, что чем более интенсивно происходит обучение организма, тем больше уменьшается его приспособленность.

В работах [10,11] моделировалось взаимодействие между обучением и эволюционной оптимизацией автономных агентов с нейросетевой системой управления. В этих моделях наблюдалась генетическая ассимиляция приобретаемых навыков в течение нескольких поколений эволюции агентов. Кроме того, обучение значительно ускоряло процесс эволюционной оптимизации. Однако детальный механизм такого влияния обучения на эволюционный процесс и собственно механизм генетической ассимиляции в моделях [10,11] было трудно выявить, так как эти механизмы были «спрятаны» в динамике многочисленных весов синапсов нейронных сетей агентов.

Данная статья развивает указанные работы, в ней построена и исследуется модель взаимодействия между обучением и эволюционной оптимизацией. Для того чтобы разобраться в деталях этого взаимодействия, строится модель эволюции популяции автономных агентов, обучающихся методом проб и ошибок. Отталкиваемся от работ [7,8], в которых продемонстрировано влияние обучения на эволюционную оптимизацию. Однако в этих работах были использованы довольно сложные схемы генетического алгоритма со скрещиванием, поэтому был продемонстрирован сам эффект влияния, а количественные зависимости, характеризующие механизмы генетической ассимиляции и эффекта экранирования, а также влияние нагрузки на обучение на эволюционную оптимизацию, представлены недостаточно четко. Для получения количественных характеристик в настоящей работе, в отличие от [7,8], используем одну из наиболее четких моделей эволюции – модель квазивидов [12,13] и количественные оценки эффективности эволюционных алгоритмов, полученные в [14,15]. Модель квазивидов рассматривает процесс эволюции, основанный на отборе и мутациях геномов особей (без скрещивания), и характеризует основные свойства эволюционного процесса. Использование моделей и методов работ [12–15] позволяет получить более четкое понимание механизмов взаимодействия обучения и эволюции. В частности, использованный в настоящей работе подход позволяет выявить и проанализировать механизм генетической ассимиляции.

## ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассматриваем эволюционирующую популяцию агентов, или модельных особей. При построении модели используем подход работы Хинтона и Новлана [7], в которой предполагается, что между генотипом и фенотипом модельной особи может быть сильная корреляция. Предполагаем, что генотип (или геном) и фенотип особи определяются единообразно, а именно, задаются цепочками символов, равных 0 либо 1. Длина этих цепочек одинакова и равна  $N$ .

Например, как и в [7], можно считать, что геном кодируется модельной цепочкой ДНК, «буквы» которой равны 0 либо 1, а фенотип определяется нейронной сетью особи, при этом веса синапсов нейронной сети также равны 0 либо 1. Начальные веса синапсов, полученные при рождении, определяются геномом (точнее, просто равны геному), а в процессе жизни особи эти веса меняются путем обучения.

Как и в модели квазивидов, предполагаем, что каждая особь имеет свой геном  $\mathbf{S}_0$ . Популяция состоит из  $n$  особей, геномы которых равны  $\mathbf{S}_{0k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Геном особи  $\mathbf{S}_{0k}$  представляет собой цепочку символов,  $S_{0ki}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Предполагаем, что длина цепочки  $N$  и численность популяции  $n$  велики:  $N, n \gg 1$ , и что  $N$  и  $n$  не меняются в ходе эволюции. Символы  $S_{0ki}$  равны 0 либо 1. Предполагаем, что  $N$  настолько велико, что только малая часть из всех возможных  $2^N$  геномов может быть представлена в отдельной популяции:  $2^N \gg n$ . Типичные значения  $N$  и  $n$  в расчетах нашей модели таковы:  $N \sim n \sim 100$ .

Эволюционный процесс состоит из последовательности поколений. Новое поколение получается из старого путем отбора и мутаций особей. В нулевом поколении геномы особей случайны.

Помимо обычной схемы модели квазивидов добавляем еще процесс обучения. В связи с этим в данной модели вводятся два вида последовательностей: 1) геномы или начальные последовательности  $\mathbf{S}_{0k}$ , полученные при рождении, и 2) текущие последовательности  $\mathbf{S}_{Tk}$ . При размножении потомки наследуют геномы своих родителей  $\mathbf{S}_{0k}$ , эти геномы не меняются в течение жизни особи и передаются (с малыми мутациями) своим потомкам. Мутации состоят в случайной замене символов  $S_{0ki}$ . В момент рождения особь получает начальную последовательность  $\mathbf{S}_{0k}$ , а текущая последовательность  $\mathbf{S}_{Tk}$  в этот момент времени  $t$  равна начальной:  $\mathbf{S}_{Tk} (t = 1) = \mathbf{S}_{0k}$ . После рождения особи живут в течение  $T$  тактов времени,  $T$  – время жизни одного поколения. Время дискретно:  $t = 1, \dots, T$ . Последовательность  $\mathbf{S}_{Tk}$  меняется в течение жизни особи путем обучения. Текущая последовательность  $\mathbf{S}_{Tk}$  отдельной особи определяет ее фенотип.

Поскольку потомкам передаются именно геномы  $\mathbf{S}_{0k}$ , полученные от родителей, а не последовательности, полученные в результате обучения, то эволюционный процесс имеет дарвиновский характер.

Предполагается, что имеется оптимальная последовательность  $\mathbf{S}_m$  (компоненты которой также равны 0 или 1), которая ищется в процессе эволюции и обучения особей. При моделировании последовательность  $\mathbf{S}_m$  задавалась случайным образом.

Обучение происходит методом проб и ошибок. При обучении меняются текущие символы последовательностей  $\mathbf{S}_{Tk}$ : каждый такт времени  $t$  каждый символ с определенной вероятностью  $p_i$  меняется на случайный (равный 0 либо 1), и если этот символ совпадает с соответствующим символом оптимальной последовательности  $\mathbf{S}_m$ , то этот символ сохраняется; в противном случае происходит возврат к старому символу последовательности  $\mathbf{S}_{Tk}$ . Таким образом, при обучении происходит приближение текущих последовательностей  $\mathbf{S}_{Tk}$  к оптимальной последовательности  $\mathbf{S}_m$ .

Отметим, что при интерпретации символов последовательностей  $\mathbf{S}_{Tk}$  как весов синапсов нейронных сетей процесс обучения имеет простой смысл: обучение происходит путем поиска оптимальных весов синапсов.

В конце поколения происходит отбор особей в соответствии с их приспособленностями, определяемыми фенотипами в такт времени  $t = T$ . Этот фенотип особи определяется полученной при  $t = T$  последовательностью  $\mathbf{S}_{Tk}$ . Обозначим эту последовательность  $\mathbf{S}_{Fk}$ , т.е. полагаем  $\mathbf{S}_{Fk} = \mathbf{S}_{Tk}(t = T)$ . Приспособленность произвольной особи  $\mathbf{S}_k$  определяется расстоянием по Хеммингу  $\rho(\mathbf{S}_{Fk}, \mathbf{S}_m)$  между последовательностями  $\mathbf{S}_{Fk}$  и  $\mathbf{S}_m$ :

$$f(\mathbf{S}_k) = \exp[-\beta\rho(\mathbf{S}_{Fk}, \mathbf{S}_m)] + \varepsilon, \quad (1)$$

где  $\beta$  – положительный параметр, характеризующий интенсивность отбора,  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Параметр  $\varepsilon$  характеризует то, что нет сильного различия в приспособленностях особей, имеющих последовательности  $\mathbf{S}_{Fk}$ , удаленные на большое расстояние  $\rho$  от оптимальной. Роль слагаемого  $\varepsilon$  можно рассматривать как влияние случайных факторов окружающей среды на приспособленность особей.

Отбор особей в новое поколение производится хорошо известным рулеточным методом, при котором особи отбираются в новое поколение вероятностным способом. Выбор особи в следующее поколение производится  $n$  раз, в результате численность популяции во всех поколениях равна  $n$ . При каждом выборе вероятность селекции определенной особи пропорциональна ее приспособленности. Подробнее рулеточный метод отбора особей в следующее поколение изложен в Приложении 1.

Таким образом, обучаемые особи отбираются по конечным текущим последовательностям особей  $\mathbf{S}_{Fk} = \mathbf{S}_{Tk}(t = T)$ , т.е. по конечному результату обучения, а по наследству передаются потомкам (с малыми мутациями) начальные геномы, начальные последовательности  $\mathbf{S}_{0k}$ , которые особи получили от своих родителей.

Дополнительно, как и в [8], учтем то, что процесс обучения имеет определенную нагрузку на особь и приспособленность особи может уменьшаться под влиянием этой нагрузки. С этой целью будем рассматривать модифицированные следующим образом приспособленности особей:

$$f_m(\mathbf{S}_k) = \exp(-\alpha d) \{ \exp[-\beta\rho(\mathbf{S}_{Fk}, \mathbf{S}_m)] + \varepsilon \}, \quad (2)$$

где  $\alpha$  – положительный параметр, учитывающий нагрузку, связанную с обучением,  $d = \rho(\mathbf{S}_{0k}, \mathbf{S}_{Fk})$  – расстояние по Хеммингу между начальной и конечной текущей последовательностями рассматриваемой особи, т.е. величина, характеризующая интенсивность всего процесса обучения особи. Введенный в (2) фактор  $\exp(-\alpha d)$  приводит к уменьшению приспособленности особи, это уменьшение тем больше, чем больше было изменение текущей последовательности  $\mathbf{S}_{Tk}$  в процессе обучения, т.е. чем больше была нагрузка на обучение.

Отметим, что поскольку начальные последовательности особей в исходной популяции  $\mathbf{S}_{0k}$  случайны, то среднее расстояние по Хеммингу между этими последовательностями и оптимальной  $\mathbf{S}_m$  равно  $N/2$ . Такое расстояние нужно преодолеть путем обучения и эволюционного поиска.

## РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

### Схема и параметры моделирования

Рассматриваются два режима работы модели: 1) с обучением, как изложено выше, 2) без обучения, в этом случае обучения не происходит и считается, что  $\mathbf{S}_{Tk} = \mathbf{S}_{0k}$ . Вторым режим можно считать случаем «чистой эволюции». Кроме того, проанализировано влияние дополнительной нагрузки, связанной с обучением, в этом случае приспособленность особи вычислялась согласно (2). Анализ модели был проведен путем компьютерного моделирования.

При расчетах параметры модели выбирались таким образом, чтобы эволюционный поиск проходил достаточно эффективно, при этом использовался опыт работы [15] для

случая чистой эволюции. Приспособленности особей в [15] определялись аналогично выражению (1), только влияние случайных факторов не учитывалось (было  $\varepsilon = 0$ ). Охарактеризуем выбор параметров расчета. Полагаем, что длина цепочки достаточно велика:  $N = 100$ . Параметр отбора считаем равным  $\beta = 1$ , это соответствует достаточно высокой интенсивности отбора, при которой время отбора сравнительно мало, а время эволюционного поиска определяется в основном интенсивностью мутаций. Интенсивность мутаций должна быть не слишком высока, чтобы не было мутационных потерь уже найденных в процессе эволюции особей, но и не слишком мала, для того, чтобы мутационный поиск происходил достаточно быстро. С учетом этого полагаем, что вероятность замены любого символа в последовательностях  $\mathbf{S}_{0k}$  при мутациях равна  $p_m = N^{-1} = 0.01$ . При такой интенсивности мутаций  $p_m$  за одно поколение происходит замена примерно одного символа в геноме особи, т.е. в течение одного поколения за счет мутаций расстояние по Хеммингу  $\rho$  между последовательностями особей  $\mathbf{S}_k$  и оптимальной последовательностью  $\mathbf{S}_m$  изменяется в среднем на 1. Отбор приводит к уменьшению этого расстояния. Поскольку интенсивность отбора достаточно велика, и расстояние по Хеммингу от последовательностей особей нулевого поколения до оптимальной  $\mathbf{S}_m$  порядка  $N$ , то весь процесс эволюции займет порядка  $G_T \sim N$  поколений. Такая оценка скорости эволюции справедлива, если численность популяции достаточно велика и флуктуационными эффектами и нейтральной фиксацией особей (не зависящей от приспособленности особей) можно пренебречь. Для выполнения этого условия достаточно потребовать, чтобы характерное время нейтрального отбора (по порядку величины равное  $n$  [15,16]) было не меньше  $G_T$ , поэтому полагаем  $n = G_T = N$ .

Итак, параметры расчета в соответствии с опытом работы [15] выбираем следующим образом:  $N = 100$ ,  $\beta = 1$ ,  $p_m = N^{-1} = 0.01$ ,  $n = G_T = N = 100$ .

В настоящей модели дополнительно считаем, что вероятность случайной замены символов при обучении достаточно велика:  $p_l \sim 1$ , число тактов времени в течение поколения равно  $T = 2$  (выбор таких параметров  $p_l$  и  $T$  приводит к тому, что обучение происходит достаточно быстро), параметр  $\varepsilon$  достаточно мал:  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Большинство расчетов было выполнено при  $p_l = 1$ , только в одном случае считалось  $p_l = 0.5$ .

Подчеркнем, что в работах [14,15,17] сделаны были оценки эффективности эволюционной оптимизации и скорости эволюции для нескольких вариантов близких друг к другу эволюционных алгоритмов. Эти оценки кратко резюмированы в Приложении 2.

Для наиболее четкого выяснения количественных результатов все полученные в данной работе зависимости были усреднены по 1000 или 10000 расчетам с разными генераторами случайных чисел.

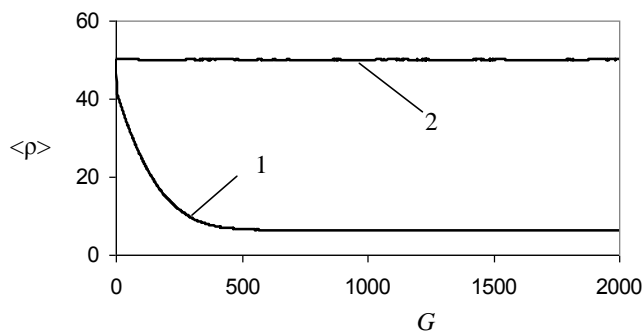
Перейдем к изложению результатов численного моделирования для настоящей модели.

### Сопоставление режимов с обучением и без обучения

Сопоставим результаты расчетов для режимов с обучением и без обучения. На рис. 1 представлена зависимость от номера поколения  $G$  среднего по популяции расстояния по Хеммингу  $\rho = \rho(\mathbf{S}_k, \mathbf{S}_m)$  между рассматриваемой последовательностью  $\mathbf{S}_k$  и оптимальной последовательностью  $\mathbf{S}_m$  в начале поколения (т.е. в данном случае  $\rho(\mathbf{S}_k, \mathbf{S}_m) = \rho(\mathbf{S}_{0k}, \mathbf{S}_m)$ ). Кривая 1 характеризует режим с обучением, кривая 2 – режим без обучения. Полученные зависимости усреднены по 1000 расчетам. Приспособленности особей определялись выражением (1). Видно, что без обучения при даже малом  $\varepsilon$  чисто эволюционный процесс (кривая 2) не обеспечивает оптимизации особей  $\mathbf{S}_k$ , а при наличии обучения (кривая 1) явно происходит приближение к оптимальной особи  $\mathbf{S}_m$ .

Чтобы разобраться, почему не происходит уменьшения  $\rho$  в процессе чистой эволюции, оценим величину приспособленности (1) в исходной популяции. Все особи

исходной популяции удалены от оптимальной, для них  $\rho \sim N/2 = 50$ , следовательно,  $\exp(-\rho) \sim 10^{-22}$  и  $\exp(-\rho) \ll \varepsilon$ . Это означает, что все особи популяции имеют приближенно одинаковое значение приспособленности, равное  $\varepsilon$ , и следовательно, в случае чистой эволюции вообще не происходит селекции особей и приближения к оптимальной особи. Приближение к  $\mathbf{S}_m$  происходит только при наличии обучения, которое приводит к понижению  $\rho$ . Отметим, что аналогичный эффект использования обучения при эволюционном нахождении оптимума, хотя и в другом контексте, был рассмотрен в работе [7].



**Рис. 1.** Зависимость среднего по популяции расстояния до оптимума  $\langle \rho \rangle = \langle \rho(\mathbf{S}_k, \mathbf{S}_m) \rangle$  от номера поколения  $G$ ; 1 – режим с обучением, 2 – режим чистой эволюции.

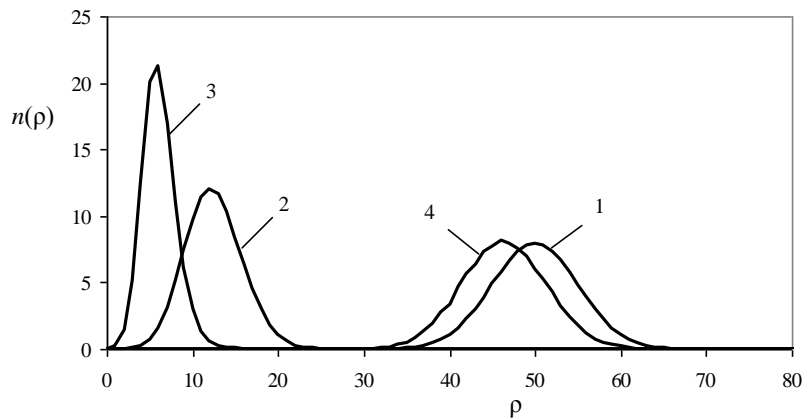
Рассмотрим подробнее эффект ускорения эволюционного процесса за счет обучения (кривая 1 на рис. 1). Важно понять, как именно и за счет чего происходит это ускорение. Анализ результатов расчета показывает, что постепенное уменьшение величин  $\rho(\mathbf{S}_k, \mathbf{S}_m)$  происходит следующим образом. Сначала при обучении распределение особей  $n(\rho)$  смещается в сторону меньших  $\rho$ , в результате чего величины  $\rho = \rho(\mathbf{S}_{Fk}, \mathbf{S}_m)$  становятся достаточно малыми, такими, что  $\exp(-\rho) \sim \varepsilon$ . Далее в соответствии с приспособленностями (1) из этих особей в следующее поколение отбираются особи с малыми значениями  $\rho = \rho(\mathbf{S}_{Fk}, \mathbf{S}_m)$ . Интуитивно понятно, что геномы  $\mathbf{S}_{0k}$  отобранных особей должны быть достаточно близки к конечным последовательностям  $\mathbf{S}_{Fk}$  (полученным в результате обучения и отбора) этих особей. Поэтому в результате отбора происходит селекция особей, геномы которых также приближаются к  $\mathbf{S}_m$ . В результате при переходе к новому поколению величина  $\rho$  в популяции уменьшается.

Изложенный механизм показан на рис. 2, на котором представлено распределение особей  $n(\rho)$  по  $\rho$  в разные моменты первого поколения. Кривая 1 показывает распределение по  $\rho = \rho(\mathbf{S}_{0k}, \mathbf{S}_m)$  для исходных геномов особей в начале поколения. Кривая 2 показывает распределение по  $\rho = \rho(\mathbf{S}_{Fk}, \mathbf{S}_m)$  для особей после обучения, но еще до отбора. Кривая 3 показывает распределение по  $\rho = \rho(\mathbf{S}_{Fk}, \mathbf{S}_m)$  для особей, отобранных в соответствии с приспособленностями (1). Кривая 4 показывает распределение по  $\rho = \rho(\mathbf{S}_{0k}, \mathbf{S}_m)$  для геномов отобранных особей в конце поколения. Геномы отобранных особей  $\mathbf{S}_{0k}$  достаточно близки к последовательностям обученных и отобранных особей  $\mathbf{S}_{Fk}$ , поэтому распределение по  $\rho = \rho(\mathbf{S}_{0k}, \mathbf{S}_m)$  для геномов (кривая 4) перемещается в сторону распределения для конечных последовательностей  $\mathbf{S}_{Fk}$  (кривая 3). В итоге после отбора в конце поколения формируется распределение геномов по  $\rho$  (кривая 4), более близкое к распределению, представленному кривой 3, чем начальное распределение геномов (кривая 1). В следующем поколении происходит аналогичное дальнейшее смещение распределения  $n(\rho)$  в сторону меньших значений  $\rho$ .

Такое смещение раскрывает механизм уменьшения  $\langle \rho \rangle$  при наличии обучения: отбор приводит к селекции геномов особей  $\mathbf{S}_{0k}$ , которые по  $\rho$  ближе к

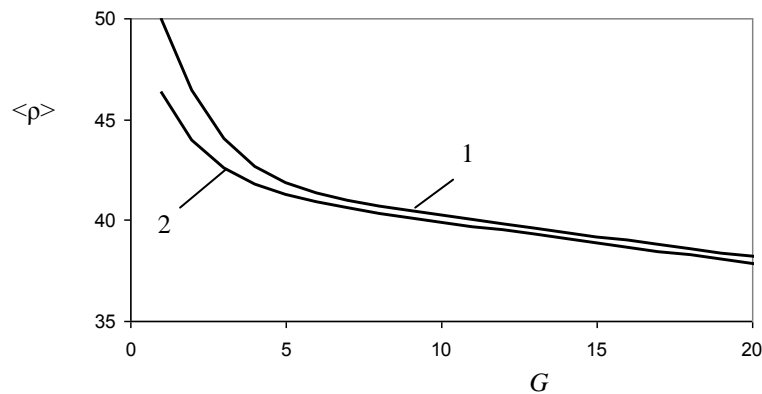
последовательностям обученных и отобранных особей  $S_{Fk}$ , чем геномы особей в начале поколения. В итоге в течение поколения происходит переход от кривой 1 к кривой 4, т.е. уменьшение величин  $\rho$ .

Подчеркнем, что в результате обучения происходит смещение к достаточно малым  $\rho$ , при которых роль параметра  $\varepsilon$  значительно уменьшается и существенно различаются приспособленности (1), так что после обучения происходит эффективный отбор особей с меньшими значениями  $\rho(S_{Fk}, S_m)$ . Этот отбор показан уменьшением значений  $\rho$  при переходе от кривой 2 к кривой 3 на рис. 2. Понятно, что для того, чтобы изложенный механизм работал, обучение должно быть достаточно сильным. О другой роли сильного обучения сказано ниже, в следующем подразделе.



**Рис. 2.** Распределение особей  $n(\rho)$  по величинам  $\rho$  в первом поколении эволюции: 1 – распределение по  $\rho = \rho(S_{0k}, S_m)$  для исходных геномов до обучения, 2 – распределение по  $\rho = \rho(S_{Fk}, S_m)$  для особей после обучения, но еще до отбора, 3 – распределение по  $\rho = \rho(S_{Fk}, S_m)$  для отобранных особей, 4 – распределение по  $\rho = \rho(S_{0k}, S_m)$  для геномов отобранных особей в конце поколения (усреднено по 10000 расчетам).

Этот же механизм уменьшения  $\rho$  для режима эволюции с обучением иллюстрируется рис. 3, на котором представлены зависимости среднего по популяции расстояния геномов до оптимума  $\rho = \rho(S_{0k}, S_m)$  от номера поколения  $G$  для момента начала поколения (кривая 1) и момента после отбора (кривая 2).



**Рис. 3.** Зависимость среднего по популяции расстояния до оптимума  $\langle \rho \rangle$  для геномов особей от номера поколения  $G$  для разных моментов поколения: 1 – начало поколения, 2 – конец поколения (усреднено по 10000 расчетам).

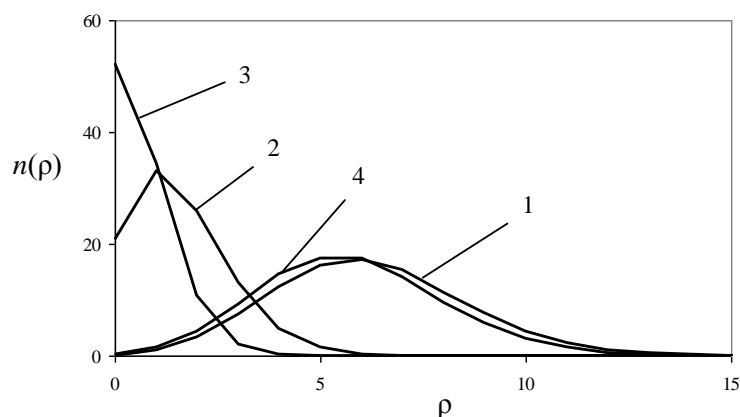
Видно, что в конце поколения (после отбора) среднее значение  $\rho$  явно уменьшается по сравнению с моментом начала поколения. В первых поколениях это уменьшение  $\rho$  максимально, в следующих поколениях величина уменьшения  $\rho$  постепенно становится меньшей.

Приведенные результаты показывают, что обучение может приводить к эффективной генетической ассимиляции, к радикальному ускорению эволюционного процесса.

### Эффект экранирования

Однако сильное обучение может не только способствовать эволюции, но и препятствовать нахождению оптимума. Как показывает кривая 1 на рис. 1, при больших  $G$  уменьшение  $\langle \rho \rangle$  ограничено: конечное значение  $\langle \rho \rangle$  остается достаточно большим, приблизительно равным 6.2. Это связано с тем, что для сильного обучения ( $p_l = 1$ ,  $T = 2$ ) при  $G \sim 1000$  нахождение последовательностей  $\mathbf{S}_k$ , близких к оптимальной  $\mathbf{S}_m$ , происходит практически независимо от генома  $\mathbf{S}_{0k}$ . Поэтому на конечных стадиях эволюции не происходит приближения геномов к  $\mathbf{S}_m$ . Наблюдается эффект экранирования, обсуждавшийся в работе [8].

Этот эффект иллюстрируется рис. 4, на котором представлены распределения по  $\rho$  в конце эволюционного процесса (при  $G = 2000$ ) для геномов  $\rho(\mathbf{S}_{0k}, \mathbf{S}_m)$  в начале поколения (кривая 1), для величин  $\rho(\mathbf{S}_{Fk}, \mathbf{S}_m)$  после обучения до отбора (кривая 2), для этих же величин  $\rho(\mathbf{S}_{Fk}, \mathbf{S}_m)$  после отбора (кривая 3) и для геномов отобранных особей  $\rho(\mathbf{S}_{0k}, \mathbf{S}_m)$  в конце поколения (кривая 4). Результаты приведены для представленного выше расчета в режиме с обучением.



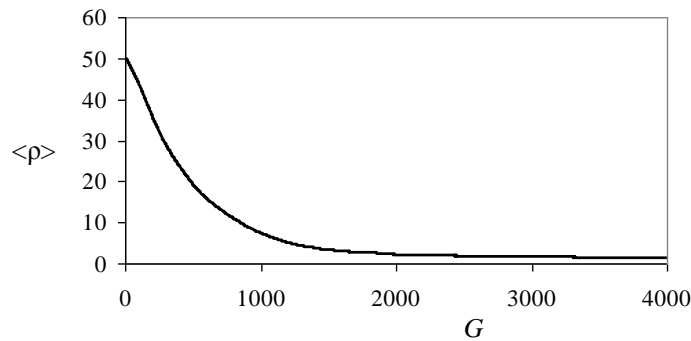
**Рис. 4.** Распределение особей  $n(\rho)$  по величинам  $\rho$  в конце эволюции (при  $G = 2000$ ): 1 – распределение по  $\rho = \rho(\mathbf{S}_{0k}, \mathbf{S}_m)$  для исходных геномов до обучения, 2 – распределение по  $\rho = \rho(\mathbf{S}_{Fk}, \mathbf{S}_m)$  для особей после обучения, но еще до отбора, 3 – распределение по  $\rho = \rho(\mathbf{S}_{Fk}, \mathbf{S}_m)$  для отобранных особей, 4 – распределение по  $\rho = \rho(\mathbf{S}_{0k}, \mathbf{S}_m)$  для геномов отобранных особей в конце поколения (усреднено по 1000 расчетам).

Видно, что распределение после обучения включает в себя особей, для которых  $\rho = 0$ , т. е. после обучения находится оптимальная последовательность  $\mathbf{S}_m$ , и хотя отбор по величинам  $\rho(\mathbf{S}_{Fk}, \mathbf{S}_m)$  происходит, расстояние между начальным распределением  $\rho(\mathbf{S}_{0k}, \mathbf{S}_m)$  и распределением  $\rho(\mathbf{S}_{Fk}, \mathbf{S}_m)$  достаточно мало. В результате в конце эволюционного процесса дальнейшего уменьшения  $\rho$  не происходит. Это подтверждается тем, что в конце эволюции показанные на рис. 4 кривые от поколения к поколению практически не смещаются, а также согласуется с тем, что при больших  $G$  величина  $\langle \rho \rangle$  становится постоянной (кривая 1 на рис. 1). То, что распределения геномов в начале поколения и после отбора (кривые 1 и 4 на рис. 4) немного различаются, связано с наличием мутаций, которые приводят к небольшому увеличению  $\rho$  в начале поколения по сравнению с распределением после отбора. Итак, в конце эволюционного процесса за счет обучения находится оптимальная особь и в результате дальнейшего уменьшения  $\rho$  в популяции не происходит.

Эффект экранирования можно существенно ослабить, если уменьшить интенсивность обучения, например, положив  $p_l = 0.5$ , не меняя прочих параметров

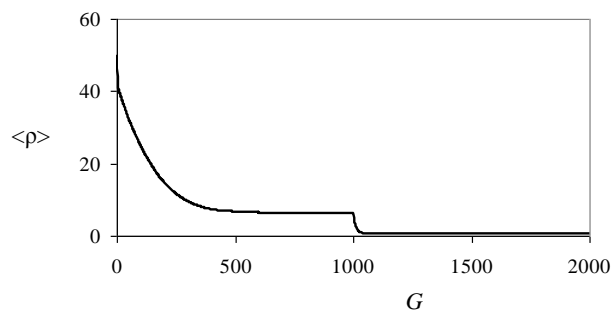


расчета. Зависимость  $\langle \rho \rangle$  от номера поколения для ослабленного обучения ( $p_l = 0.5$ ) представлена на рис. 5. Так же как и для результатов, представленных на рис. 1,  $\langle \rho \rangle$  определялось в момент начала поколения. Для этого случая скорость уменьшения  $\langle \rho \rangle$  с течением эволюции падает, однако конечное значение  $\langle \rho \rangle$  значительно уменьшается и становится приближенно равным 1.4. Отметим, что в этом случае приближение к малым значениям  $\rho$  (при которых происходит эффективный отбор особей с малыми значениями  $\rho(\mathbf{S}_{Fk}, \mathbf{S}_m)$ ) в результате обучения происходит медленней, чем в случае  $p_l = 1$ , и, как следствие, процесс поиска оптимума замедляется. Итак, значение  $\langle \rho \rangle$  в конце эволюции значительно уменьшается. Следовательно, ослабление обучения приводит к тому, что фенотип, определяющий отбор, в большей степени зависит от генома  $\mathbf{S}_{0k}$ , и происходит отбор особей, геномы которых достаточно близки к  $\mathbf{S}_m$ .



**Рис. 5.** Зависимость среднего по популяции расстояния до оптимума  $\langle \rho \rangle$  от номера поколения  $G$  при ослабленном обучении:  $p_l = 0.5$  (усреднено по 1000 расчетам); по сравнению со случаем  $p_l = 1$  скорость обучения уменьшается, но находятся геномы особей, значительно более близкие к  $\mathbf{S}_m$ .

Эффект экранирования можно устранить и другим способом: выключив процесс обучения при достаточно большом  $G$ . Был проведен расчет, для которого при  $G = 1000$  обучение выключалось (рис. 6). Параметры расчета были такими же, как и для расчета, представленного на рис. 1.



**Рис. 6.** Зависимость среднего по популяции расстояния до оптимума  $\langle \rho \rangle$  от номера поколения  $G$ ; при  $G = 1000$  обучение выключается, после чего эволюционный процесс быстро приводит к нахождению  $\mathbf{S}_m$  (усреднено по 1000 расчетам).

В результате выключения обучения сразу после поколения  $G = 1000$  происходило скачкообразное уменьшение  $\langle \rho \rangle$ , которое имеет следующее объяснение. Так как при  $G = 1000$  величина  $\langle \rho \rangle$  уменьшилась до значений, приближенно равных 6, то в этой популяции уже  $\exp(-\rho) \sim 0.001 \gg \varepsilon$ , и приспособленности особей (вычисляемые согласно (1)) становятся существенно различными. Следовательно, эволюционная селекция особей успешно функционирует; в результате эволюционный процесс приводит к эффективному нахождению  $\mathbf{S}_m$ . Анализ результатов этого расчета показывает, что при  $G = 2000$  конечное значение  $\langle \rho \rangle$  (для геномов в начале поколения)

приблизительно равно 0.8 и что особи  $S_m$ , для которых  $\rho = 0$ , в популяции присутствуют как в начале, так и в конце поколения.

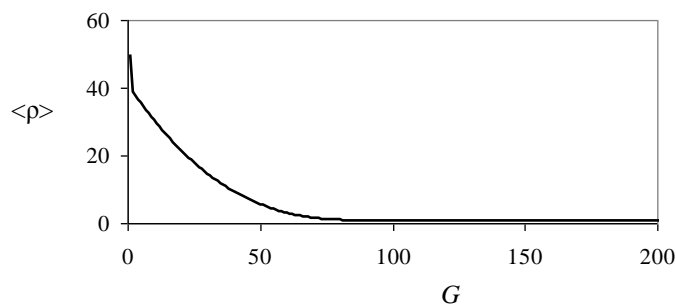
Итак, проанализированы особенности эффекта экранирования, при котором сильное обучение препятствует эволюционной оптимизации, так как оно увеличивает шансы нахождения хорошего фенотипа независимо от генома особи. В нашем случае экранирование наблюдается в конце эволюционного процесса.

### Влияние нагрузки на обучение на моделируемые процессы

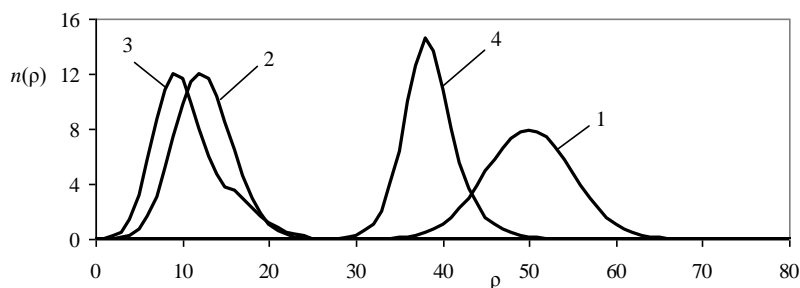
Также был проведен анализ влияния нагрузки на обучение на моделируемые процессы эволюции с обучением. Для этого случая приспособленность определялась выражением (2). Расчет проводился для указанных выше параметров ( $N = n = 100$ ,  $\beta = 1$ ,  $p_m = 0.01$ ,  $p_l = 1$ ,  $T = 2$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ ), величина  $\alpha$  полагалась равной 1. Результаты расчета представлены на рис. 7, 8. На рис. 7 показана зависимость среднего по популяции расстояния  $\langle \rho \rangle$  между последовательностями  $S_k$  и оптимальной последовательностью  $S_m$  от номера поколения  $G$ . Как и ранее,  $\langle \rho \rangle$  определялось в момент начала поколения. На рис. 8 представлена динамика распределения особей  $n(\rho)$  по величинам  $\rho$  в первом поколении эволюции в разные моменты поколения.

Сравнение рис. 1, 2 и рис. 7, 8 показывает, что учет нагрузки на обучение приводит к дополнительному значительному ускорению эволюции. Это ускорение связано с тем, что с учетом нагрузки при отборе происходит более сильная селекция особей, для которых мало расстояние между начальной и конечной последовательностями  $\rho(S_{0k}, S_{Fk})$ , чем для случая приспособленности (1), т.е. дополнительно минимизируется изменение последовательности  $S_{Tk}$  в процессе обучения. Отметим, что распределение 3 на рис. 8 имеет немного «растянутый хвост» справа, это можно интерпретировать как то, что в соответствии с приспособленностями (2) преимущественно отбираются особи, для которых мало изменение последовательностей  $S_{Tk}$  при обучении. В конце эволюционного процесса (при  $G = 200$ ) конечное значение  $\langle \rho \rangle$  (для геномов в начале поколения) приблизительно равно 0.8; особи  $S_m$ , для которых  $\rho = 0$ , в популяции присутствуют в начале поколения, после обучения и после отбора.

Подчеркнем, что генетическая ассимиляция для случаев приспособленностей, определяемых выражением (1) и выражением (2), имеет одну и ту же природу. В обоих случаях геномы отобранных особей  $S_{0k}$  приближаются к последовательностям  $S_{Fk}$  обученных и отобранных особей. Т.е. на рис. 2 и 8 кривые 4 приближаются к кривым 3. Существенное различие состоит только в том, что с учетом нагрузки на обучение это приближение становится более эффективным. В результате при использовании приспособленности, вычисляемой согласно (2), генетическая ассимиляция становится более четко выраженной.



**Рис. 7.** Зависимость среднего по популяции расстояния до оптимума  $\langle \rho \rangle$  для геномов особей от номера поколения  $G$ ; учитывается влияние нагрузки на обучение, приспособленность особей определяется выражением (2), уменьшение  $\langle \rho \rangle$  происходит намного быстрее, чем на рис. 1 (усреднено по 1000 расчетам).



**Рис. 8.** Распределение особей  $n(\rho)$  по величинам  $\rho$  в первом поколении эволюции с учетом нагрузки на обучение, приспособленность особей определяется выражением (2); 1 – распределение по  $\rho = \rho(\mathbf{S}_{0k}, \mathbf{S}_m)$  для исходных геномов до обучения, 2 – распределение по  $\rho = \rho(\mathbf{S}_{Fk}, \mathbf{S}_m)$  для особей после обучения, но еще до отбора, 3 – распределение по  $\rho = \rho(\mathbf{S}_{Fk}, \mathbf{S}_m)$  для отобранных особей, 4 – распределение по  $\rho = \rho(\mathbf{S}_{0k}, \mathbf{S}_m)$  для геномов отобранных особей в конце поколения; смещение распределения 4 к меньшим значениям  $\rho$  существенно больше, чем на рис. 2 (усреднено по 10000 расчетам).

Таким образом, учет нагрузки на обучение для рассматриваемых эволюционных процессов приводит к тому, что происходит более эффективная селекция особей с геномами  $\mathbf{S}_{0k}$ , близкими к  $\mathbf{S}_m$ , и процесс эволюции значительно ускоряется.

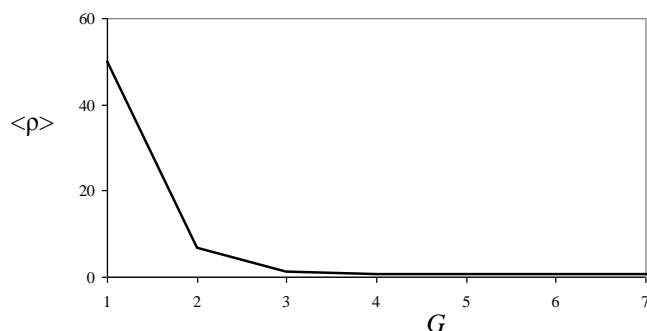
### Вероятностный и детерминированный отбор

Отметим, что всюду выше в модели предполагался вероятностный отбор особей в соответствии с их приспособленностями. И наличие малого параметра  $\varepsilon$  в выражении (1) приводило к тому, что чисто эволюционный процесс вообще не приводил к уменьшению  $\langle \rho \rangle$  и приближению к оптимальной последовательности  $\mathbf{S}_m$ . Можно сделать отбор не вероятностным, а детерминированным, в котором точно вычисляются приспособленности в соответствии с (1). Например, можно в компьютерной программе ранжировать все особи популяции по величине приспособленности, отбирать в следующее поколение ровно половину особей, приспособленности которых больше, чем для остальных особей популяции, и размножить отобранные особи, дублируя их.

Был проведен расчет случая такого детерминированного отбора. Расчет показал, что в этом случае чистая эволюция приводит к нахождению  $\mathbf{S}_m$ , при этом характерное время сходимости эволюционного процесса составляет порядка 100 поколений. Но детерминированный отбор предполагает, что приспособленности особей (1) с большой точностью вычисляются в компьютерной программе, что неестественно для реальных биологических процессов. Для биологических процессов более естественно считать, что отбор осуществляется вероятностным способом, как это и предполагалось выше.

### Моделирование эволюции по Ламарку

Для полноты анализа была проанализирована не только эволюция по Дарвину, как это изложено выше, но и эволюция по Ламарку. В этом случае генами потомков становились немного модифицированные мутациями полученные в результате обучения и отбора конечные последовательности  $\mathbf{S}_{Fk}$ . Пример расчета в случае ламарковской эволюции для приспособленности, вычисляемой согласно (1), и для таких же параметров, как и выше ( $N = n = 100$ ,  $\beta = 1$ ,  $p_m = 0.01$ ,  $p_l = 1$ ,  $T = 2$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ ) представлен на рис. 9. Видно, что процесс поиска  $\mathbf{S}_m$  происходит очень быстро.



**Рис. 9.** Зависимость среднего по популяции расстояния до оптимума  $\langle \rho \rangle$  от номера поколения  $G$ ; случай ламарковской эволюции (усреднено по 1000 расчетам).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, построена и исследована модель взаимодействия между обучением и эволюционной оптимизацией. В соответствии с результатами работ [14,15,17] были выбраны параметры модели, обеспечивающие эффективные эволюционные процессы.

Детально изучен механизм генетической ассимиляции приобретаемых навыков в течение ряда поколений эволюционного процесса. Показано, что генетическая ассимиляция происходит за счет того, что при обучении распределение особей смещается в сторону оптимума, а в дальнейшем при отборе выбираются те особи, геномы которых приближаются к оптимальной последовательности. Показано, что генетическая ассимиляция может приводить к радикальному ускорению эволюционных процессов.

Изучен эффект экранирования, который приводит к тому, что сильное обучение тормозит эволюционный поиск оптимальной последовательности, если оно увеличивает шансы нахождения хорошего фенотипа независимо от генома особи. Показано, что при ослаблении обучения роль эффекта экранирования уменьшается.

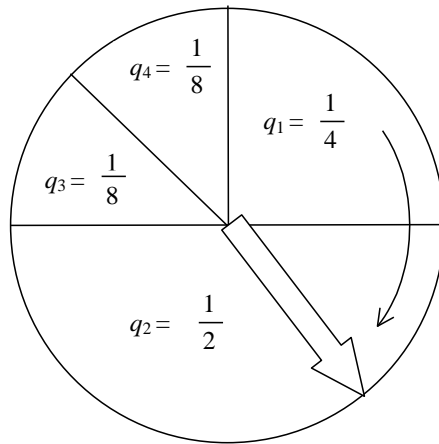
Проанализировано влияние нагрузки на обучение на исследованные процессы. Нагрузка на обучение приводит к уменьшению приспособленности особей таким образом, что это уменьшение тем больше, чем больше было изменение последовательности  $S_{Tk}$  в процессе обучения. Показано, что наличие нагрузки на обучение приводит к усилению генетической ассимиляции и к дополнительному значительному ускорению эволюции.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00129) и программы президиума РАН «Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация». Автор благодарен Е.Д. Рыбакову и Л.Е. Цитоловскому за плодотворные дискуссии.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

### СХЕМА РУЛЕТОЧНОГО МЕТОДА

Изложим схему рулеточного метода. Формирование новой популяции организуется следующим образом. Представим, что у нас есть рулетка (рис. 10). Для каждого поколения отмечаем на рулетке  $n$  секторов, долю  $k$ -го сектора (отнесенную ко всей площади круга) полагаем равной  $q_k = f_k \left[ \sum_{l=1}^n f_l \right]^{-1}$ , где  $f_k = f(\mathbf{S}_k)$  – приспособленности особей. Далее  $n$  раз крутим рулетку, каждый раз определяем номер сектора, на котором останавливается стрелка, и соответствующую этому номеру особь выбираем в популяцию следующего поколения. Таким образом, в следующее поколение будут отобраны  $n$  особей. При этом для каждого вращения рулетки вероятность  $k$ -й особи попасть в следующее поколение пропорциональна ее приспособленности  $f_k$ . Некоторые особи будут отобраны в новое поколение несколько раз, что можно рассматривать как появление в новой популяции нескольких потомков данной особи.



**Рис. 10.** Схема рулеточного метода, при котором особи выбираются в популяцию нового поколения с вероятностями  $q_k$ , пропорциональными их приспособленностям  $f_k$ ; показан пример, для которого  $n = 4, f_1 = 2, f_2 = 4, f_3 = 1, f_4 = 1$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ОЦЕНОК ЭФФЕКТИВНОСТИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ

Приведем основные результаты оценок эффективности и скорости сходимости эволюционных алгоритмов [14,15,17]. В качестве опорной модели рассматриваем модель квазивидов [12,13], в которой рассматривается эволюция популяции особей  $\mathbf{S}_k$ ; каждая особь  $\mathbf{S}_k$  определяется последовательностью символов  $S_{ki}$ , символы принимают два значения:  $S_{ki} = 0$  либо  $S_{ki} = 1$ ;  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $N$  – длина последовательностей;  $n$  – численность популяции. Приспособленность особи  $\mathbf{S}$  экспоненциально уменьшается с ростом расстояния по Хеммингу  $\rho = \rho(\mathbf{S}, \mathbf{S}_m)$  между  $\mathbf{S}$  и оптимальной последовательностью  $\mathbf{S}_m$ :

$$f(\mathbf{S}) = \exp[-\beta\rho(\mathbf{S}, \mathbf{S}_m)], \quad (3)$$

где  $\beta$  – параметр интенсивности отбора.

Эволюционный процесс состоит из ряда поколений, в каждом поколении происходят а) отбор особей в следующее поколение рулеточным методом с вероятностями, пропорциональными приспособленностям особей  $f(\mathbf{S})$ , и б) мутации – случайные замены отдельных символов  $S_{ki}$  с вероятностями, равными  $p_m$ .

Как и в основной модели предполагаем, что  $N, n \gg 1$  и  $2^N \gg n$ . Второе неравенство означает, что только малая часть из всех возможных геномов может быть представлена в отдельной популяции. Исходная популяция состоит из случайных особей, поэтому характерное расстояние  $\rho$  между этими особями  $\mathbf{S}$  и оптимальной последовательностью  $\mathbf{S}_m$  приближенно равно  $N/2$ .

В процессе эволюции новые особи с меньшими значениями  $\rho$  появляются в результате мутаций и фиксируются в популяции за счет отбора. Характерное время  $t_{-1}$ , за которое среднее в популяции значение  $\langle\rho\rangle$  уменьшается на 1, составляет:  $t_{-1} \sim t_m + t_s$ ;  $t_m \sim (Np_m)^{-1}$  – характерное время, за которое особи популяции промутируют,  $t_s \sim \beta^{-1}$  – характерное время, за которое особи, для которых  $\rho = \langle\rho\rangle - 1$ , в результате отбора вытеснят из популяции особей, для которых  $\rho = \langle\rho\rangle$ .

Общее число поколений, за которое находится оптимальная последовательность  $\mathbf{S}_m$ , порядка  $G_T \sim t_{-1} N$ , следовательно, имеем:

$$G_T \sim (p_m)^{-1} + N\beta^{-1}. \quad (4)$$

Выберем параметры модели квазивидов для заданного  $N$  так, чтобы в эволюционном поиске оптимальной последовательности  $\mathbf{S}_m$  принимало участие минимально возможное число особей. Делаем следующие предположения.

1) Считаем, что интенсивность отбора достаточно велика:  $\beta \geq p_m N$ , в этом случае в оценке (4) можно пренебречь вторым слагаемым, т.е. скорость эволюции определяется интенсивностью мутаций.

2) Считаем, что интенсивность мутаций не слишком велика, так что можно пренебречь мутационными потерями уже найденных удачных последовательностей, и не слишком мала, так что эволюционный поиск оптимума  $\mathbf{S}_m$  идет достаточно быстро. А именно, полагаем, что в среднем происходит одна мутационная замена символа в каждой последовательности в каждом поколении:  $p_m \sim N^{-1}$ . Следовательно, из (4) имеем оценку общего числа поколений эволюционного поиска:  $G_T \sim N$ .

3) Также предполагаем минимальную допустимую численность популяции, при которой еще не существенны потери удачных особей в результате нейтрального отбора. Характерное время нейтрального отбора составляет величину порядка численности популяции  $n$  [14–16]. Это время должно быть не меньше  $G_T$ . Для

минимальной допустимой численности популяции должно быть  $n \sim G_T$ . Если численность популяции меньше таких величин, то время эволюционного поиска увеличится по сравнению со сделанными оценками.

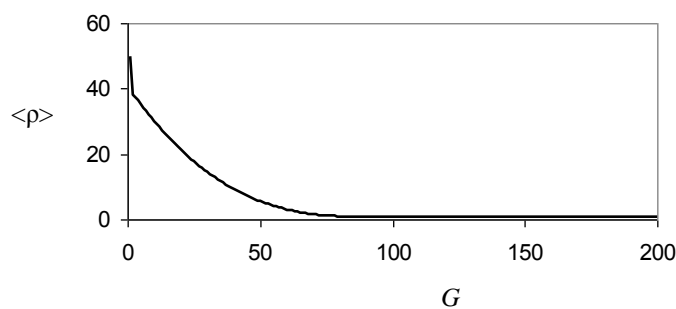
С учетом сделанных предположений имеем  $n \sim G_T \sim N$ . В результате получаем оценки общего числа поколений эволюционного процесса  $G_T$  и общего числа особей, участвующих в эволюционном поиске  $n_{total}$  ( $n_{total} = n G_T$ ):

$$G_T \sim N, n_{total} \sim N^2. \quad (5)$$

Приведенные оценки были получены для случая унимодальной функции приспособленности (3). Близкие оценки справедливы и для других аналогичных моделей: эволюционной модели узкого канала и модели эволюционного поиска минимумов энергии спинового стекла [14,17,18]. Для модели узкого канала, чтобы пройти от произвольной особи к оптимальной, мутационные замены символов должны происходить последовательно, причем каждый раз замена должна происходить только в одной четко определенной компоненте последовательности. В случае эволюционного поиска минимумов энергии спинового стекла число локальных максимумов приспособленности экспоненциально растет с увеличением числа спинов  $N$ . Для обеих указанных моделей также справедливы оценки (5). Небольшие отличия состоят в том, что для модели узкого канала эволюционный процесс происходит несколько медленней, чем для изложенной модели квазивидов с хемминговой мерой близости, а для эволюционной модели поиска минимумов энергии спинового стекла процесс сходится не к глобальному минимуму энергии, а одному из достаточно глубоких локальных минимумов. Оценки (5) для всех указанных моделей были подтверждены численными расчетами.

Итак, параметры эффективного эволюционного поиска таковы:  $n = N$ ,  $p_m = N^{-1}$ ,  $\beta = 1$ .

На рис. 11 представлена динамика среднего по популяции расстояния по Хеммингу  $\langle \rho \rangle$  до оптимальной последовательности  $S_m$  в модели квазивидов с функцией приспособленности (3) для случая чистой эволюции. Расчет был проведен для выбранных ранее параметров:  $N = 100$ ,  $\beta = 1$ ,  $p_m = 0.01$ ,  $n = 100$ . Видно, что скорость эволюционного поиска согласуется с оценками (5). Отметим, что зависимости  $\langle \rho \rangle$  от  $G$  на рис. 7 и рис. 11 почти совпадают, это, в частности, означает, что учет нагрузки на обучение может приводить к сильному ускорению эволюционного процесса.



**Рис. 11.** Зависимость среднего по популяции расстояния до оптимума  $\langle \rho \rangle$  от номера поколения  $G$ ; расчет для чистой эволюции; приспособленность особей определяется выражением (3) (усреднено по 1000 расчетам).

Подчеркнем, что модель квазивидов может рассматриваться как каноническая модель эволюции, основанной на мутациях и отборе геномов особей. Оценки скорости сходимости и эффективности эволюционного поиска для этой модели определяются выражениями (5).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baldwin J.M. A new factor in evolution. *American Naturalist*. 1896. V. 30. P. 441–451.
2. Morgan C.L. On modification and variation. *Science*. 1896. V. 4. P. 733–740.
3. Osborn H.F. Ontogenetic and phylogenetic variation. *Science*. 1896. V. 4. P. 786–789.
4. Waddington C.H. Canalization of development and inheritance of acquired characters. *Nature*. 1942. V. 150. P. 563–565.
5. *Adaptive Individuals in Evolving Populations: Models and Algorithms*. Eds. Belew R.K. and Mitchell M. Massachusetts: Addison-Wesley, 1996.
6. *Evolution, Learning, and Instinct: 100 Years of the Baldwin Effect: Special Issue of Evolutionary Computation on the Baldwin Effect*. Eds. Turney P., Whitley D., Anderson R. 1996. V. 4. № 3.
7. Hinton G.E., Nowlan S.J. How learning can guide evolution. *Complex Systems*. 1987. V. 1. P. 495–502.
8. Mayley G. Guiding or hiding: Explorations into the effects of learning on the rate of evolution. In: *Proceedings of the Fourth European Conference on Artificial Life (ECAL 97)*. Eds. Husbands P. and Harvey I. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1997. P. 135–144.
9. Ackley D. Littman M. Interactions between learning and evolution. In: *Artificial Life II: Proceedings of the Second Artificial Life Workshop*. Eds. Langton C.G., Taylor C., Farmer J.D., Rasmussen S. Redwood City CA: Addison-Wesley, 1992. P. 487–509.
10. Red'ko V.G., Mosalov O.P., Prokhorov D.V. A model of evolution and learning. *Neural Networks*. 2005. V. 18. №. 5–6. P. 738–745.
11. Редько В.Г., Редько О.В. Бионическая модель генетической ассимиляции приобретаемых навыков. В: *Научная сессия НИЯУ МИФИ - 2010. XII Всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика-2010»: Сборник научных трудов. В 2-х частях. Ч.1.* М.: НИЯУ МИФИ, 2010. С. 191–198.
12. Эйген М. *Самоорганизация материи и эволюция биологических макромолекул*. М.: Мир, 1973.
13. Эйген М., Шустер П. *Гиперцикл. Принципы самоорганизации макромолекул*. М.: Мир, 1982.
14. Редько В.Г. *Эволюция, нейронные сети, интеллект. Модели и концепции эволюционной кибернетики*. М.: УРСС, 2005.
15. Редько В.Г., Цой Ю.Р. Оценка эффективности эволюционных алгоритмов. *Доклады АН*. 2005. Т. 404. № 3. С. 312–315.
16. Кимура М. *Молекулярная эволюция: теория нейтральности*. М.: Мир, 1985.
17. Редько В.Г., Цой Ю.Р. Оценка скорости и эффективности эволюционных алгоритмов. В: *Бионические информационные системы и их практические применения*. Под ред. Зинченко Л.А., Курейчика В.М., Редько В.Г. М.: Физматлит, 2011. С. 109–126.
18. Редько В.Г. Спиновые стекла и эволюция. *Биофизика*. 1990. Т. 35. Вып. 5. С. 831–834.

Материал поступил в редакцию 04.09.2012, опубликован 18.12.2012.